MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
Office de la Topographie et du Cadastre

Note sur la Détermination des paramètres du Modèle de Bursa-Wolf

Par
Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Général à l'Office de la Topographie et du Cadastre

Novembre 2011

Version 1.

Office de la Topographie et du Cadastre
www.otc.nat.tn

Ingénieur Général, Chef de la Division de la Coopération Technique et le Développement des Ressources Humaines.
Office de la Topographie et du Cadastre (OTC),
BP 156, 1080 Tunis Cedex, Tunisie
Email : benhadjsalema@yahoo.co.uk.

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURSA-WOLF

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

1. Introduction

Avec le développement de la technologie de positionnement spatial (GPS, GLONASS, Galileo, ComPass), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X, Y, Z) tridimensionnelle dans un système géocentrique mondial donné, par exemple pour la technologie GPS c'est le système dit $WGS84$ (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. Nous présentons ci-après en détail comment déterminer manuellement les paramètres du modèle de Bursa-Wolf de transformations de passage entre les systèmes géodésiques.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :
- (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique (O, X_1, Y_1, Z_1)(système 1),
- (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système local (système 2) (O', X_1, Y_1, Z_1).

2. Le Modèle de BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{T} + (1+m).R(rx, ry, rz).\boldsymbol{X}_1 \tag{1}$$

où :
- $\boldsymbol{X}_2$ est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^T$, T désigne transposée,
- $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O'O}$ est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3×3) pour passer du système 1 au système 2,
- $\boldsymbol{X}_1$ est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comment déterminer les paramètres modèle (1) ?

3. Détermination de l'échelle $1+m$

On suppose donné un ensemble de points Pi pour $i=1,n$ connus dans les deux systèmes S_1 et S_2. On écrit l'équation (1) pour deux points Pj et Pk, d'où :

$$\boldsymbol{X}(Pj)_2 = \boldsymbol{T} + (1+m).R(rx,ry,rz).\boldsymbol{X}(Pj)_1 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{X}(Pk)_2 = \boldsymbol{T} + (1+m).R(rx,ry,rz).\boldsymbol{X}(Pk)_1 \tag{4}$$

Par différence, on obtient :

$$(\mathbf{PjPk})_2 = (1+m).R(rx,ry,rz).(\mathbf{PjPk})_1 \tag{5}$$

On prend la norme des deux membres de (5) et que $1+m>0$:
(6)
$$\|(\mathbf{PjPk})_2\| = \|(1+m).R(rx,ry,rz).(\mathbf{PjPk})_1\| = (1+m)\|R(rx,ry,rz).(\mathbf{PjPk})_1\|$$

Comme R est une matrice de rotation, donc son application à un vecteur est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle laisse invariant la norme ou la longueur du vecteur soit :

$$\|R.\boldsymbol{X}\| = \|\boldsymbol{X}\| \quad \forall\, \boldsymbol{X} \tag{7}$$

On a donc :

$$\|(\mathbf{PjPk})_2\| = (1+m)\|(\mathbf{PjPk})_1\| \tag{8}$$

Soit :

$$1+m = \frac{1}{N}\sum^{N} \frac{\|(\mathbf{PjPk})_2\|}{\|(\mathbf{PjPk})_1\|} \tag{9}$$

N désigne le nombre de couples de points $PjPk, j \neq k$.

4. Détermination des rotations (rx,ry,rz)

Connaissant $(1+m)$, pour un couple de points Pj, Pk, on a :

$$(\mathbf{PjPk})_2 = (1+m).R(rx,ry,rz).(\mathbf{PjPk})_1$$

Détaillons la matrice R :
(10)
$$R = \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -rx & ry \\ rx & 0 & -rz \\ -ry & rz & 0 \end{pmatrix} = I_3 + Q$$

avec I_3 la matrice Unité et Q la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -rx & ry \\ rx & 0 & -rz \\ -ry & rz & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Alors l'équation (5) devient :

$$(\mathbf{PjPk})_2 = (1+m).(I_3 + Q(rx,ry,rz)).(\mathbf{PjPk})_1 \tag{12}$$

Soit comme $m << 1$ et $m << 1$:

$$Q(rx, ry, rz).(\mathbf{PjPk})_1 = (1-m).(\mathbf{PjPk})_2 - (\mathbf{PjPk})_1 \tag{13}$$

En posant :
(14)

$$(\mathbf{PjPk})_2 = \begin{pmatrix} \Delta X'_{jk} \\ \Delta Y'_{jk} \\ \Delta Z'_{jk} \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{PjPk})_1 = \begin{pmatrix} \Delta X_{jk} \\ \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 = (1-m)\Delta X'_{jk} - \Delta X_{jk} \\ v_2 = (1-m)\Delta Y'_{jk} - \Delta Y_{jk} \\ v_3 = (1-m)\Delta Z'_{jk} - \Delta Z_{jk} \end{pmatrix}$$

Alors, on obtient l'équation :

$$Q(rx, ry, rz).(\mathbf{PjPk})_1 = v \tag{15}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} -\Delta Y_{jk} & \Delta Z_{jk} & 0 \\ \Delta X_{jk} & 0 & -\Delta Z_{jk} \\ 0 & -\Delta X_{jk} & \Delta Y_{jk} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Or le déterminant de la matrice Q' :

$$Q' = \begin{pmatrix} -\Delta Y_{jk} & \Delta Z_{jk} & 0 \\ \Delta X_{jk} & 0 & -\Delta Z_{jk} \\ 0 & -\Delta X_{jk} & \Delta Y_{jk} \end{pmatrix} \tag{17}$$

est nul. Pour passer de cette conséquence, on utilise pour chaque ligne du système (16) un couple de points ij ce qui donne le système :

$$\begin{pmatrix} -\Delta X_{jk} & \Delta Z_{jk} & 0 \\ \Delta X_{lm} & 0 & -\Delta Z_{lm} \\ 0 & -\Delta X_{in} & \Delta Y_{in} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{jk1} \\ v_{lm2} \\ v_{in3} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Le système (18) devient résolvable ce qui permet de déterminer les trois rotations rx, ry et rz.

5. Détermination des composantes de la Translation T

Les composantes Tx, Ty, Tz du vecteur translation sont déterminées à partir des coordonnées des points Pj connus dans les deux systèmes à partir de :

$$Tx_j = X_{2j} - (1+m)(X_{1j} - rxY_{1j} + ryZ_{1j}) \tag{19}$$

$$Ty_j = Y_{2j} - (1+m)(rxX_{1j} + Y_{1j} - rzZ_{1j}) \tag{20}$$

$$Tz_j = Z_{2j} - (1+m)(-ryX_{1j} + rzY_{1j} + Z_{1j}) \tag{21}$$

Les composantes Tx, Ty, Tz sont obtenues par une moyenne sur les N points communs à savoir :

$$Tx = \frac{\sum_j^N Tx_j}{N} \tag{22}$$

$$Ty = \frac{\sum_j^N Ty_j}{N} \tag{23}$$

$$Tz = \frac{\sum_j^N Tz_j}{N} \tag{24}$$

6. Référence

1. A. Ben Hadj Salem. (2011). Cours d'initiation au GPS. v1. 32 p.